VAN HIELEOVE RAZINE MATEMATIČKIH POSTIGNUĆA UČENIKA U RH
(zajedničko akcijsko djelovanje nastavnika i učenika)

Petar Mladinić, Zagreb

25. rujna 2018.

U RH, osim međunarodnih istraživanja PISA i TIMSS i već davnog pokušaja istraživanja pomoću nacionalnih ispita, nisu provedena neka veća istraživanja matematičkih postignuća učenika.

Sad je NCVVO najavio nacionalne ispite iz matematike za osnovnu školu.

Iz niza razloga uobličili smo ovaj projekt **akcijskog istraživanja** postignuća naših učenika.

Nekoliko riječi o akcijskom istraživanju nastavnika iz dva teksta koje je napisao B. Bognar.

U školi usmjerenoj na promjene učitelji bi trebali preuzeti aktivnu ulogu u procesu istraživanja (Hariss, 2002, str. 33) za razliku od dosadašnje prakse gdje su u najboljem slučaju bili samo korisnici rezultata tuđih istraživanja. S obzirom na taj zahtjev, akcijska istraživanja u mnogočemu odgovaraju potrebama učitelja. Kroz proces akcijskih istraživanja učitelji mogu rješavati uočene probleme i unapređivati praksu u skladu s autonomno postavljenim ciljevima. U središtu akcijskih istraživanja nalazi se akcija, a prikupljeni podaci služe kao povratna informacija na temelju koje je moguće prilagođavati i mijenjati planirane aktivnosti. Time cijeli proces istraživanja postaje fleksibilan i kreativan odgovor na potrebe sudionika istraživanja. Unatoč tome što akcijska istraživanja podrazumijevaju intrinzičnu motivaciju onih koji ih ostvaruju, važno je da u školama postoji poticajno ozračje za ostvarivanje te vrlo zahtjevne profesionalne uloge.
(`Akcijska istraživanja u školi - sažetak - Mr.sc. Branko Bognar, Filozofski fakultet, Osijek`)

Tradicionalni pristupi stručnom usavršavanju polaze od pretpostavke da je za ostvarivanje promjena dovoljno informirati praktičare o novim mogućnostima koje su vrlo često osmišljene i ispitane izvan njihova profesionalnog konteksta. Za razliku od toga akcijska istraživanja podrazumijevaju aktivnu ulogu praktičara u svim etapama ostvarivanja promjena polazeći od sljedećih pretpostavki:

1. *Odgoj je kompleksna djelatnost za koju je vrlo rijetko moguće unaprijed predvidjeti i propisati odgovarajuća rješenja.*

2. *Za ostvarivanje suštinskih promjena presudno je povoljno društveno ozračje i potpora praktičarima - agentima promjena.*

3. *Učenje se ostvaruje putem djelovanje i (samo)kritičke rasprave praktičara u okviru zajednica prakse ili zajednica učenja o rezultatima vlastitog djelovanja.*

4. *Za evaluaciju i prezentaciju vlastitog djelovanja odgovorni su prije svega praktičari.*

U akcijskim istraživanjima učitelji problematiziraju uvjete svoga odgojnog djelovanja nastojeći osmisliti, primijeniti i istražiti prikladna rješenja koja su u velikoj mjeri rezultat njihove inovativnosti. Upravo takva, stvaralačka rješenja učitelja, predstavljaju vrlo često najprimjerenije odgovore za probleme s kojima se učitelji u praksi suočavaju.
(Bognar, B. (2009): `Ostvarivanje suštinskih promjena u odgojnoj praksi posredstvom akcijskih istraživanja`, Odgojne znanosti, Vol.11 No.2 (18) prosinac 2009)

U RH nije bilo ovakvih "malih" i korisnih (za same učenike i nastavnike) istraživanja.

1. Uvod

Projekt je fokusiran na nastavničko utvrđivanje i povećanje razina postignuća učenika u temeljnom pojmu matematike - u pojmu funkcije i konkretnih funkcija koje se podučavaju u školskoj matematici (linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijskih).

Te su funkcije i temelj uporabe matematike u prirodoslovlju (fizici, biologiji i kemiji).

Pojam funkcije usko je poveza i s računalnom znanošću, računalnim razmišljanjem i programiranjem i kao takav vrlo važan segment informatike.

Postoji više modela hijerarhijskog klasificiranja postignuća u školskoj matematici. Evo nekoliko modela:

1. B. S. Bloomova taksonomija,
2. P. i M. van Hiele teorija (van Hieleove razine),
3. R. T. Whiteov model,
4. J. van Dermolonova klasifikacija,
5. Ch. J. Buckleyeva klasifikacija.

U svjetskoj znanosti prevladale su Bloomova taksonomija i van Hieleova teorija. Veliki broj istraživanja, objavljenih stručnih i znanstvenih članaka i doktorskih disertacija ukazuje da se prijedlozi današnjih promjena u nastavi matematike trebaju temeljiti na konkretnim provedenim istraživanjima praktičara u akcijskim istraživanjima. S matematičkog aspekta, **istraživanja van Hieleovih razina puno bolje daju uvid u matematička postignuća učenika**.

U jednom od primjera testova, kao ilustraciju, komparirat ćemo učenička postignuća sukladno Bloomovoj taksonomiji i van Hieleovoj teoriji i ukazati na njihove razlike razina u tom testu.

Ovim projektom želimo **akcijskim istraživanjem nastavnika** <u>saznati</u>/<u>uočiti</u>/<u>naslutiti</u> van Hieleove razine učeničkih postignuća u funkcijama kao temeljnom pojmu u našoj školskoj matematici te ponuditi moguća poboljšanja u poučavanju i učenju.

U RH nitko nije do sada istraživao Bloomove ili van Hieleove razine postignuća u nastavi matematike. Ili je to bilo sporadično!

Akcijskim istraživanjem **učitelji/nastavnici** problematiziraju uvjete svoga odgojnog djelovanja nastojeći osmisliti, primijeniti i istražiti prikladna rješenja.

Projekt bi se realizirao tijekom dvije školske godine.

Ovim akcijskim istraživanjem ispitat će se van Hieleove razine učeničkih postignuća u funkcijama na kraju osnovnoškolskog obrazovanja i u gimnaziji. Posebice bi se istraživale van Hieleove razine koje se mogu uočiti analizom maturalnih ispita i pogrješaka pri rješavanju maturalnih zadataka.

Orijentir u ovom istraživanju bit će nam doktorske disertacije [19], [24], [30], [32], [26], [7], [35], istraživanje [27] i tekstovi [15], [8], [12], [17], [16], [14], [20], [31], [13], [6], [2] te [36]. Ostale tekstove i činjenice navedene u Literaturi također ćemo respektirati u našem akcijskom istraživanju.

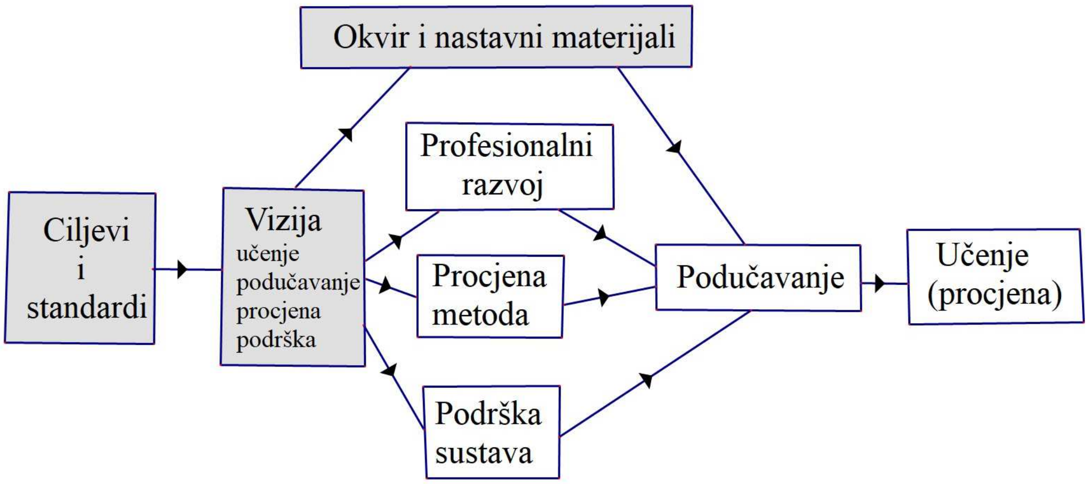
U privitku su preslike dva rada ([6] i [8]) objavljena u RH o van Hieleovim razinama. Dajemo i dva primjera (iz svjetske literature), kao ilustraciju, testova iz geometrije.

Ovdje dajemo i jedan primjer testa o funkcijama.

Testovi/zadatci o funkcijama konstruirat će se nakon podrške/dopuštenja MZO-a o provođenju ovog projekta u nekoliko škola.

2. Cilj akcijskog istraživanja

Ovim akcijskim istraživanjem načinit ćemo mali, početni korak nastavničkih promišljanja nastave i činjenica vidljivih na dijagramu.



a) Uvid u stanje

Želimo ovim akcijskim istraživanjem uočiti/procijeniti razine matematičkih postignuća (u nekim posebnim/djelomičnim matematičkim područjima) određenog broja učenika (različitog uzrasta) u RH i temeljem rezultata i postignutog iskustva predložiti daljnje istraživanje nastavnicima (potvrdu ili opovrgnuće) tih iskustava kao i korekciju zadataka, a sve u cilju poboljšanja i same nastave matematike (u sadržajnom i funkcionalnom smislu).

Posebice nam je cilj potaknuti druge nastavnike u (samostalno) istraživanje njihove nastave i postignuća te nastave na objektivniji i sadržajniji način od uobičajenih testova koje provode tijekom nastavne godine.

Posebna će se pozornost posvetiti sudjelovanju i promišljanjima samih učenika o predloženim zadatcima.

U nizu istraživanja u svijetu posvećena je pozornost usporedbi postignuća van Hieleovih razina između učenika koji u svojem učenju uporabljuju i alate dinamične geometrije/edukacijskog softvera, tj. uporabljuju računalo. Rezultati tih istraživanja ukazuju da takvi učenici postižu bolje rezultate. Jedan od ciljeva, nakon ovog projekta, bio bi istražiti i takva iskustva u nastavi matematike u RH.

Rješavanje zadataka u višim razredima osnovne škole ukazat će što i kako trebaju uvažiti nastavnici tijekom nastave u tim razredima, tj. što treba mijenjati u višim razredima u podučavanju i učenju nekih sadržaja kao i što treba uvažiti ili promijeniti u tim zadatcima s takvim sadržajima.

Rješavanje zadataka u 1. razredu gimnazije ukazat će što i kako trebaju uvažiti nastavnici tijekom nastave u 1. razredu srednje škole, tj. što treba mijenjati u 1. razredu u podučavanju i učenju linearne funkcije kao i što treba uvažiti ili promijeniti u tim zadatcima.

Rješavanje zadataka u 2. razredu gimnazije ukazat će kako dostići određene van Hieleove razine o kvadratnim, eksponencijalnim i logaritamskim funkcijama.

Rješavanje zadataka u 3. razredu gimnazije ukazat će kako dostići određene van Hieleove razine o trigonometrijskim funkcijama.

Rješavanje zadataka u 4. razredu gimnazije ukazat će kako dostići određene van Hieleove razine o nizovima, redovima i o derivaciji.

Analiza rješavanja određene vrste zadataka (linearne i kvadratne funkcije, eksponencijalne i logaritamske funkcije, trigonometrijske funkcije, nizovi, redovi i deriviranje funkcija) ukazat će na razine iz tih područja na kraju (na maturi) predtercijarnog školovanja.

Istraživanje aritmetičkog niza se može povezati s linearnom i kvadratnom funkcijom, a geometrijskog niza s istraživanjem eksponencijalne funkcije, a ne samo (kao što je sada) u četvrtom razredu gimnazije. I sukladno rezultatima eventualno bismo predložili promjene u rasporedu sadržaja matematičkog kurikula.

Zainteresirane učitelje iz osnovne škole i njihove učenike završnih razreda uključili bismo u akcijsko istraživanje s njihovim prijedlozima istraživanja sadržaja u osnovnoj školi. I na taj način im omogućili (kao i srednjoškolskim nastavnicima) profesionalni razvoj, procjenu metoda i dali im podršku za daljnje promišljanje rješenja njihovih problema u podučavanju i učenju učenika.

Primjerice, u ovom projektu uključili bismo ih u akcijsko istraživanje pojma funkcije (linearne i kvadratne).

Rezultati ovog akcijskog istraživanja nastavnika mogli bi ukazati što bi nacionalnim ispitima trebalo točno utvrditi i/ili mijenjati u nastavi matematike.

b) Iskustvo

Tijekom konstruiranja zadataka i nakon provedbe rješavanja mijenjat će se skup zadataka i prijedlog njihovih razina uz uvažavanje učeničkih prijedloga i primjedbi. Promjene zadataka bit će sukladne iskustvu nastavnika i učenika u njihovom promišljanju, rješavanju i uporabi.

Na ovaj način nastavnici će stjecati iskustvo u kreiranju zadataka za određenu van Hieleovu razinu kao i iskustvo izmjena u zadatcima (i svojem poučavanju) sukladno rezultatima svojih učenika.

c) Prijedlog popravljenog testa

Prijedlog popravljenog testa/skupa zadataka s uputama uporabe stavit će se na raspolaganje ostalim (zainteresiranim) nastavnicima uz zamolbu da dostave svoja promišljanja i iskustva u njihovoj uporabi kako bi se mogli "ugraditi" u daljnju doradu.

d) Analiza van Hieleovih razina na maturi

Analizirat će se odgovarajući zadatci o funkcijama koje su na nekoliko maturalnih ispita rješavali učenici. Posebna će se pozornost posvetiti pogrješkama koje su učenici učinili u njihovom rješavanju. Prijedlog zaključaka dostavit će se NCVVO-u na daljnju uporabu i razmatranje.

e) Hipoteza/teza

Istraživanja koja su elaborirana u popisu Literature ukazuju da učenici u prva tri razreda gimnazije mogu dostići najviše 3. van Hieleovu razinu. Tek u četvrtom razredu gimnazije mogu dostići 4. van Hieleovu razinu. Najviša van Hielova razina "rezervirana" je za studente.

Ovim akcijskim istraživanjem, uz aktivno sudjelovanje i nastavnika i učenika, želimo utvrditi može li se prezentiranjem i rješavanjem zadataka koji su strukturirani prema van Hielovim razinama povećati postotak učenika koji dostižu 3. i 4. razinu.

f) Priručnik za nastavnike, učenike i roditelje o van Hieleovim razinama

Sukladno rezultatima rješavanja zadataka i iskustvu nastavnika u ovom akcijskom istraživanju "standardizirali" bi se zadatci (tj. primjeri zadataka) sukladno van Hieleovim razinama i uzrastu učenika. Na ovaj bi se način moglo ukazati na transparentno ujednačavanje i povezanost dostignute razine s ocjenom iz matematike.

Nakon akcijskog istraživanja zadatci, postignute razine i iskustva uobličit će se u *Priručnik za nastavnike, učenike i roditelje* i na taj način povećati ujednačavanje ocjenjivanja samih učenika. Priručnik bi drugim zainteresiranim učiteljima/nastavnicima omogućio da se i sami "okušaju" u promišljanju rješavanja problema u svojoj nastavi (poučavanju i učenju).

3. Projekt akcijskog istraživanja

Objasnimo ukratko što su to van Hieleove razine u različitim područjima školske matematike.

a) O van Hieleovim razinama u geometriji možete pročitati u tekstu [6] koji se nalazi u privitku kao i u *Sažetku van Hieleovih razina u geometriji* pri kraju ovog elaborata.

"Od objavljivanja, ova je teorija znanstveno potvrđena raznim metodama i danas više nema sumnji u njezinu valjanost. Svatko od učenika (i ne samo učenika!) nalazi se na određenoj van Hieleovoj razini geometrijskog mišljenja, a učenici iste dobi često su na različitim razinama. Pritom se većina učenika nižih razreda osnovne škole nalazi na nultoj razini, a rijetko koji učenik osmog razreda na razini višoj od druge. <u>Pravilno prepoznavanje o kojim se razinama radi i usklađivanje poučavanja s tim razinama pridonijet će kvaliteti nastave geometrije i učeničkom uspjehu u savladavanju geometrijskih koncepata</u> (potcrtao P. M.). Učeničke aktivnosti svakako trebaju biti primjerene njihovoj van Hieleovoj razini i usmjerene njihovom podizanju u sljedeću višu razinu." (str. 149. u [6])

b) Michael de Villiers u tekstu [7] (str. 560. - 588.) koji je u privitku opisuje van Hieleove razina u:

- Booleovoj algebri (str. 581.-582.),
- opisivanju funkcija (str. 582.-583.),
- trigonometriji (str. 583.-584.),
- eksponencijalnim i logaritamskim funkcijama (str. 585.).

Isoda, Land i Nixon posvećuju veliku pozornost van Hieleovim razinama u funkcijama. U konstruiranju odgovarajućih zadataka za odgovarajuće razine koristit ćemo i njihova promišljanja i prijedloge.

Druge radove de Villiersa i njegova promišljanja i savjete respektirat ćemo u ovom akcijskom istraživanju. Posebice ćemo njegovo znanje, iskustvo i savjete koristiti kao jednog od kritičkih prijatelja (u istraživanju).

c) O istraživanjima van Hieleovih razina

Mayberry, Usiskin, Thomas i Orton svojim su istraživanjima pronašli razine slične van Hieleovim, ali i elemente Piagetove teorije kad su proučavali učenje funkcija među djecom u dobi od 12 do 17 godina. Lovell je smatrao da treba dalje nastaviti proučavanje razina usvojenosti algebre i funkcija. Senk je pronašao nedostatke u sposobnosti pismenog dokazivanja među učenicima srednjih škola nakon što su proučavali geometriju. Usiskin smatra da je stopa neuspjeha u prvoj godini učenja algebre i veća nego u geometriji. Rosen je utvrdio da je u skupini od 27 vrlo sposobnih srednjoškolaca 25% nije pokazalo smisleni uvid u koncept funkcija, 50% smisleni uvid te 25% značajan uvid.

Niz je istraživača utvrdio razumnom tvrdnju da dva cilja matematičkog obrazovanja (matematičko znanje i matematičko razmišljanje) ostvaruje manja manjina učenika.

Dvostruka sposobnost van Hieleovog modela da opiše učeničko razmišljanje i propiše upute za razumijevanje većine strukturiranih disciplina preporuča se kao sredstvo za sprječavanje frustracije koju doživljavaju i učenici i nastavnici.

Istraživanja širom svijeta, do danas, potvrđuju ove rezultate.

Masami Isoda u [15] (str. 105.-107.) navodi 5 razina jezika o funkcijama:

"1. **Razina svakodnevnog jezika**,
Učenici opisuju odnose u fenomenima koristeći se svakodnevnim jezikom. Oni mogu raspravljati o promjene brojeva koristeći izračune, ali obično se njihovi opisi usmjeravaju na jednu fizički vidljivu varijablu, *zavisnu varijablu*. Teško je njima objasniti na primjeren način korištenjem dviju varijabli jer se njihovi opisi odnosa obavljaju nejasno koristeći svakodnevni jezik. Zato im je teško usporediti različite pojave odjednom, na odgovarajući način.

2. **Razina aritmetike**,
Učenici opisuju pravila odnosa pomoću *tablica*. Izrađuju i istražuju tablice s aritmetikom. Njihovi opisi odnosa u pojmovima precizniji su s tablicama nego s jednim svakodnevnim jezikom razine 1. Učenici imaju opće pojmove o nekim pravilima odnosa, na primjer, *proporcijama*. Učenici mogu koristiti formule i grafove kako bi predstavljali pravila i odnose, ali nije lako prelaziti između notacija.

3. **Razina algebre i geometrije**,
Učenici opisuju funkcije pomoću jednadžbi i grafova. Da bi istražili funkciju, prelaze/kreću se među oznakama tablica, jednadžbi i grafova i koriste algebru i geometriju. Na ovoj razini, njihovog zapisa funkcije, koju već dobro razumiju, uključuju prikaz različitih zapisa koji su već integrirani kao mentalna slika. Primjerice, lako mogu pronaći jednadžbu koja pripada grafu i graf koji pripada jednadžbi.

4. **Razina računa (kalkulusa)**,
Učenici opisuju funkciju koristeći račun (kalkulus). U računu, funkcije su opisane u terminima *derivacija* ili *primitivnih funkcija*. Primjerice, da bismo opisali značajke funkcije, koristimo njezino deriviranje koje je već naučeno. Teorija računa (kalkulusa) je opća teorija ove vrste opisa.

5. **Razina analize (matematičke analize)**.
Primjer jezika za opis je funkcionalna analiza koja je metateorija kalkulusa. Opravdanje ove razine temelji se na povijesnom razvoju i još nije istraženo."

Ilustrirajući dualitet između objekta i metode u van Hielovim razinama Isoda navodi primjere da između svake razine ima neprenosivih pojmova. Postojanje dualnosti i neprenosivih pojmova ukazuje na hijerarhijski odnos između razina.

Evo primjera.

"U slučaju kvadratne funkcije možemo uočiti sljedeće razlike.

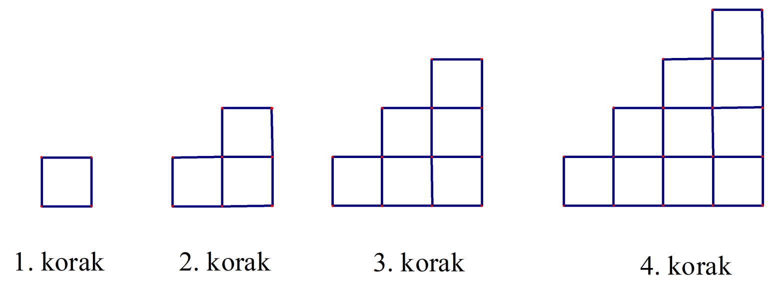
1. razina: Učenici ne mogu jednostavno usporediti situacije. Ne mogu na odgovarajući način razlikovati kvadratnu od ostalih situacija ako koristimo samo svakodnevni jezik.
2. razina: Kvadratne funkcije i kontekstualne situacije mogu se opisati u tablici gdje su druge razlike (razlike razlika) konstantne.
3. razina: Kvadratne funkcije su opisane algebarski s $y = ax^2 + bx + c$ i geometrijski pomoću parabola. Tangenta se razmatra pomoću $b^2 - 4ac$.
4. razina: Kvadratna funkcija opisana je derivacijom kubne funkcije i primitivnom funkcijom linearne funkcije. Tangenta se razmatra pomoću derivacije."

Navedimo ilustracije radi tri problema/zadatka koje je Isoda naveo u spomenutom radu.

1. Ako je u tablici y proporcionalan s x, koliki su onda P i Q?

x	3	6	P
y	7	Q	35

2. Dane su stube koje se grade pomoću kvadrata sa stranicom 1 cm (v. sl.).



Q1. Kako se mijenja opseg promjenom uzlaznog broja koraka? Zašto mislite da je to tako?

Q2. Kako se mogu povezati broj koraka i opseg?

Q3. Koliki je opseg ako imamo 10 koraka?

3. Napišite što možete uočiti u sljedećim tablicama?

x	1	2	3	4
y	4	8	12	16

x	1	2	3	4
y	2	8	18	32

d) Broj razreda, učenika, nastavnika i škola u projektu

U projektu predviđamo škole i učenike iz 5 hrvatskih sveučilišnih središta: Osijeka, Zagreba, Splita, Zadra i Rijeke.

U Zagrebu bismo odabrali 2 gimnazije, dok u ostalima po 1 gimnaziju, tj. ukupno 6 škola.

U svakoj gimnaziji odabrali bismo barem po jedan 1., 2., 3. i 4. razred, tj. barem 4 odjeljenja.

Dakle, u projektu bi bilo uključeno u gimnazijama barem 6 prvih, 6 drugih, 6 trećih i 6 četvrtih razreda. To je ukupno 24 razrednih odjeljenja ili 700-tinjak učenika.

U svakoj osnovnoj školi iz ovih gradova odabrali bismo po jedan završni razred.

Nastavnici u odabranim razredima proveli bi anonimno rješavanje zadataka. Dakle, rješavanje bi u gimnazijama provelo u svojim razredima 6 - 24 nastavnika, a u osnovnoj školi po jedan nastavnik.

U projekt bismo uključili i zainteresirane učitelje iz osnovne škole i njihove učenike nakon što se jave na javni poziv i pristupe ovom akcijskom istraživanju. Sadržaj i uzrast koji bi se istraživao elaborirao bi se sukladno njihovim prijedlozima.

e) Vrijeme rješavanja zadataka, ispunjavanje upitnika i trajanje projekta

Matematički sadržaji za koje se planiraju ispitati van Hieleove razine po razredima u gimnaziji:

- 1. razred: linearna funkcija,
- 2. razred: kvadratna funkcija, eksponencijalna i logaritamska funkcija,
- 3. razred: trigonometrijska funkcija,
- 4. razred: nizovi, redovi i deriviranje funkcija.

Rješavanje testa bilo bi tijekom, krajem i/ili početkom nastavne godine. Vrijeme rješavanja zadataka bilo bi usklađeno s nastavničkim godišnjim planom poučavanja određenog matematičkog sadržaja.

Rješavanje zadataka bi trajalo do 1 školski sat. Učenici bi nakon testa ispunili kratku anketu/upitnik s procjenom zadataka i izrazili svoj sud/prijedloge o njima. Nakon uvida u učenička rješenja nastavnici i učenici bi razmotrili postignuća i predložili poboljšanja ili promjene zadataka.

Projekt bi (priprema, rješavanje zadataka, analiza i objava izvješća) trajao dvije školske godine.

Posebna bi se pozornost posvetila izboru zadataka i rezultatima njihovog rješavanja na maturalnom ispitu, tj. uočavanju postignuća van Hieleovih razina na kraju školovanja. Odabir ovih zadataka s maturalnih ispita bio bi iz područja koja se ispituju ovim projektom.

f) Upitnik

Vrlo važan dio ovog istraživanja je i upitnik koji će učenici, ali i njihovi nastavnici, popuniti nakon rješavanja zadataka.

Cilj je upitnika:

(a) prosudba zadataka,
(b) prosudba raspoloživog vremana za rješavanje,
(c) mišljenje o samom projektu,
(d) mišljenje o ostalim činjenicama i prijedlozi sudionika.

Posvetit će se posebna pozornost ovome cilju kao i uvažavanju rezultata u rješavanju zadataka.

Sadržaj upitnika tj. pitanja u upitniku zavise o uzrastu učenika i sadržaju/zadatcima koji će se odabrati za rješavanje. Pitanja će biti usklađena sa sadržajem zadataka i pojedinim uzrastom. U ovom trenutku je nemoguće konstruirati Upitnik. Dostavit će se ministarstvu nakon odobrenja projekta i nakon kreiranja testa (ali prije provedbe u školama).

g) Javni poziv školama i nastavnicima

Nakon što ministarstvo odobri ovaj projekt akcijskog istraživanja uputit će se Javni poziv školama i nastavnicima/učiteljima za sudjelovanje.

U Javnom pozivu bit će projekt ukratko prezentiran kao i određeni uobičajeni uvjeti koje javni poziv treba imati, a sudionici ih mogu ispuniti/garantirati.

U odabiru prijavljenih škola, nastavnika i razreda sudjelovat će AZOO kao i nekoliko kritičkih prijatelja.

h) Kritički prijatelji

U sastavljanju i odabiru zadataka, provođenju, analizi i u uobličavanju zaključaka i izvješća sudjelovali bi nastavnici koji su proveli rješavanje, školnici koji su sastavljali zadatke, učenici i kritički prijatelji.

To bi bili barem po 1 nastavnik iz svake škole koja sudjeluje u akcijskom istraživanju, barem po 1 sveučilišni nastavnik s katedre za metodiku nastave matematike iz sveučilišnih središta (Osijek, Zagreb, Split, Zadar i Rijeka), po 1 predstavnik AZOO-a i NCVVO-a, te 1 - 2 strana sveučilišna nastavnika stručnjaka za van Hieleove razine (M. de Villiers i A. Gutiérrez) kao i učenici svojim pisanim osvrtom.

Potencijalnim kritičkim prijateljima osobno će se uputiti zamolba za sudjelovanjem.

Dakle, barem 20-ak nastavnika uključeni bi bili u rad kao kritički prijatelji.

i) Etički zahtjevi

Uz prethodnu suglasnost ministarstva o realizaciji u projektu će se poštivati sve etičke uzance istraživanja: dragovoljnost sudjelovanja, pristanak roditelja (pisani), učenika, nastavnika i škole, anonimnost rješavanja zadataka, objava izvješća u stručnoj periodici, slanje integralnog izvješća svim sudionicima (školama, AZOO-u, NCVVO-u, ministarstvu i kritičkim prijateljima) te drugi zahtjevi.

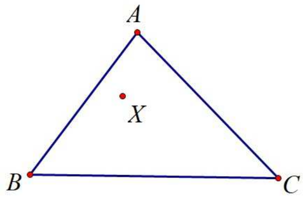
4. Primjer testa te usporedba Bloomovih i van Hieleovih razina

Ovdje navodimo, kao ilustraciju, primjer testa iz geometrije kao i usporedbu Bloomovih i van Hieleovih razina zadataka u testu.

Nakon suglasnosti ministarstva odabrat će se zadatci iz funkcija za svaki razred i oni će biti sastavni dio ovog dokumenta.

Drugi primjer testa koji je konstruirao Usiskin, kao ilustraciju, dajemo u privitku.

Test: Ovaj test sadrži 12 pitanja i traje 35 - 40 minuta. Namijenjen je rješavanju u 1. razredu gimnazije. Može također poslužiti nastavnicima na kraju 8. razreda. Konstruirala ga je Dhlamini i nalazi se u njezinoj disertaciji [6]. Test istražuje razumijevanje geometrije kružnice. Potkrijepljen je usporedbom Bloomove taksonomije učenja i van Hielovih razina razumijevanja euklidske geometrije.



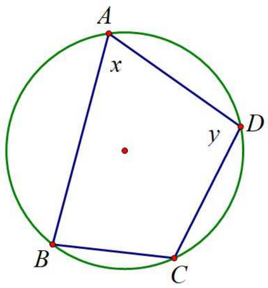
1. Nacrtajte okomicu iz X na AB.

2.

2.1. Kako se ovi kutovi nazivaju?

....

....



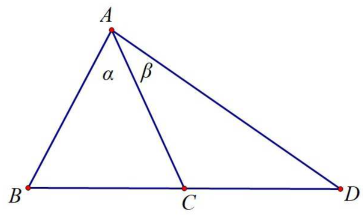
2.2. Pravci $AB \parallel CD$ su usporedni. Kakva je veza između kuta x i kuta y?
Obrazložite svoj odgovor.

....

....

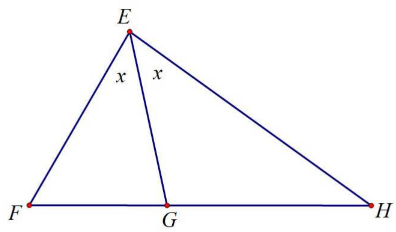
3.

3.1. Zadano je $|BC| = |CD|$. Jesu li dva označena kuta α i β jednaka? Zašto da ili ne? Objasnite svoj odgovor na najbolji mogući način.



....
....
....

3.2. Ako je $\angle FEG = \angle GEH$ je li onda $|FG| = |GH|$? Zašto da ili ne? Objasnite svoj odgovor na najbolji mogući način.



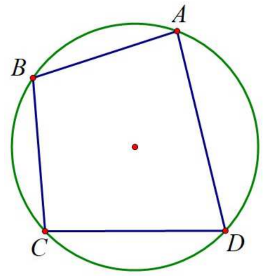
....
....
....

4. Ilustrirajte sljedeću tvrdnju odgovarajući grubim crtežom:

Središnji kut jednak je dvostrukom pripadnom obodnom kutu.

5.

5.1. Ako je kut u vrhu A pravi, je li nužno da je $ABCD$ kvadrat?



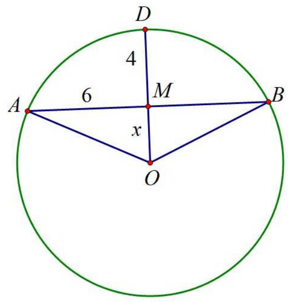
....
....

5.2. Obrazložite svoj odgovor logičkim zaključivanjem ili ilustriranjem prikladnim primjerom

....
....

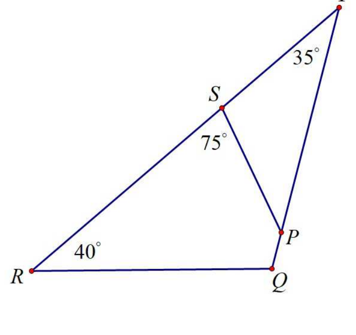
6. Dužina $\overline{AB}$ tetiva je kružnice sa središtem O i duljine 12 cm. Točka M polovište je dužine $\overline{AB}$. Dužina $\overline{MD}$ koja je okomita na $\overline{AB}$, tj. $\overline{MD} \perp \overline{AB}$, siječe kružnicu sa središtem O u točki D.

Izračunajte polumjer kružnice, ako je $|MD| = 4$ cm.



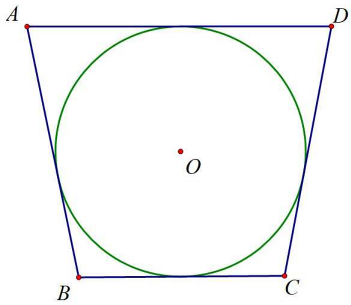
....
....
....
....
....
....

7. Dokažite da je $PQRS$ (na slici) tetivni četverokut.



....
....
....
....
....
....
....

8. Na slici je točka O središte upisane kružnice četverokutu $ABCD$. Opseg četverokuta je 25 cm i $|AD| = 8$ cm. Izračunajte duljinu stranice $\overline{BC}$.



....
....
....
....
....
....
....

9.

9.1. Simetrale stranica četverokuta $ABCD$ sijeku se u jednoj točki (konkurentne su). Leže li četiri vrha A, B, C i D na kružnici?

9.2. Obrazložite svoj odgovor ili logičko razmišljanje.

....
....
....
....
....

10. Kvadrat, romb, pravokutnik, paralelogram, deltoid ili trapez

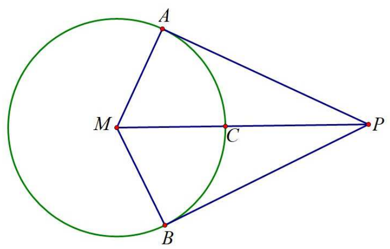
10.1. Koji od gore navedenih četverokuta predstavlja uvijek tetivni četverokut? Molimo vas obrazložite svoje zaključivanje.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

10.2. Kojem se od gore navedenih četverokuta uvijek može upisati kružnica? Molimo vas obrazložite svoje zaključivanje.

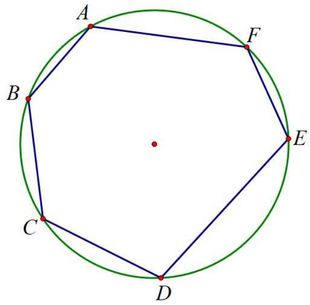
....
....
....
....
....

11. Ako su PA i PB tangente kružnice sa središtem M, je li deltoid $PAMB$ tetivni? Obrazložite svoj odgovor zašto da ili zašto ne.



....
....
....
....
....
....
....

12. Dokažite da je $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F = 360°$



....
....
....
....
....
....
....

Pitanja, kategorije i razine zadataka

Pitanje/zadatak	BTC (Bloomova taksonomija)	VHL (van Hielova razina)
1	1	1
2	1 i 2	1 i 2
3	2 i 3	1 i 3
4	2	2
5	3 i 5	2 i 3
6	3	3
7	3	3
8	5	4
9	3 i 4	3
10	3	3 i 4
11	4	3
12	5	4

5. Sažetak van Hieleovih razina u geometriji

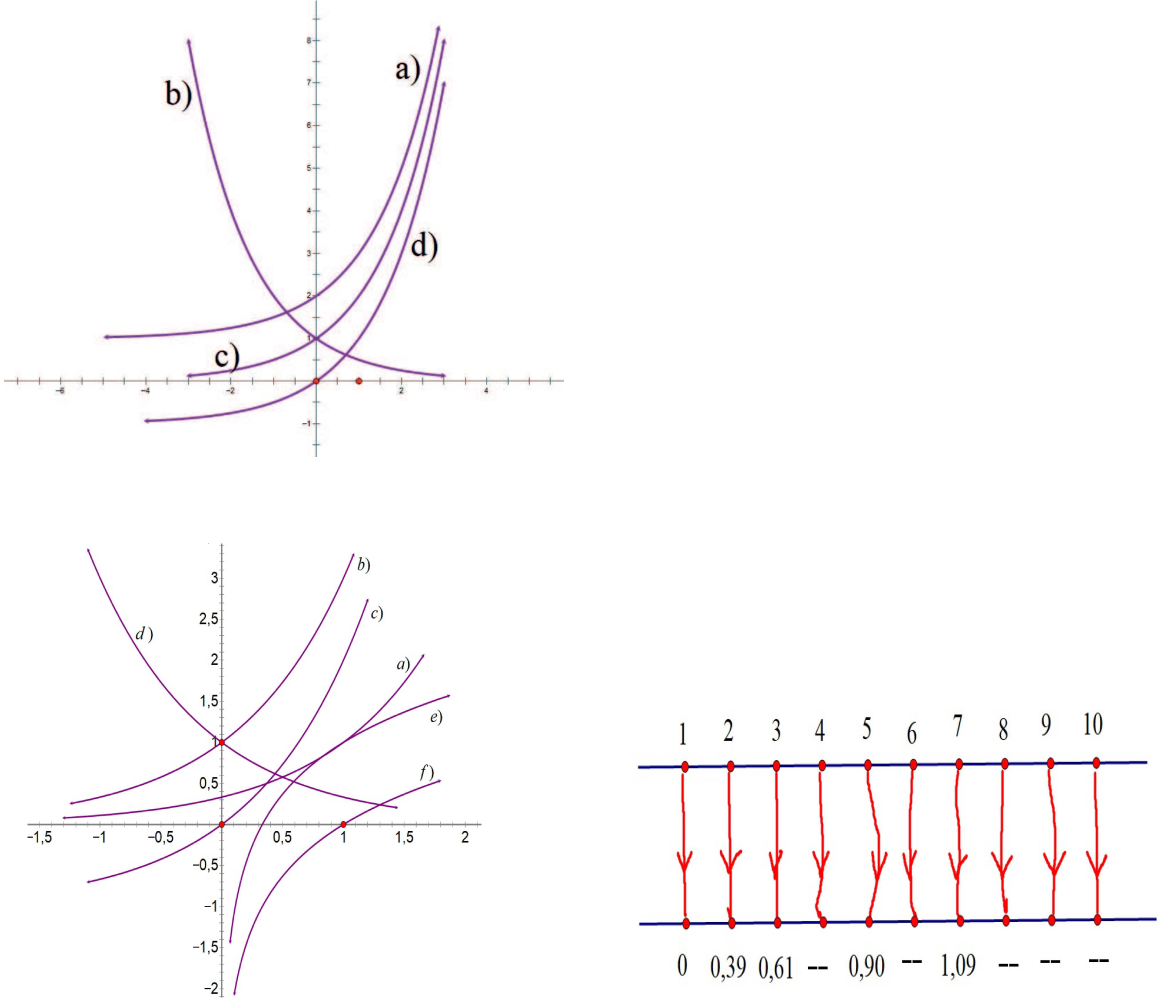
Ovdje ilustracije radi dajemo sažetak van Hielovih razina u geometriji ilustrirajući pri tome što se zadatcima i pitanjima na svakoj razini proučava, kako se proučava te odgovarajući primjer.

razina	što se proučava	kako se proučava	primjer
1	individualni objekti, tj. trokut, kvadrat ili deltoid	vizualno prepoznavanje na temelju fizičkog izgleda	kvadrati svih veličina s istom orijentacijskom grupom zajedno na temelju njihove orijentacije ili izgleda
2	klase oblika npr. rombovi su deltoidi (zmajevi) jer rombovi imaju sva svojstva deltoida	Slike sa zajedničkim karakteristikama grupiraju se primjerice, rombovi su podklase deltoida.	Romb ima sve stranice jednake, okomite dijagonale i osi simetrije kroz jedan par suprotnih kutova.
3	Učitelj počinje definirati likove/oblike koji pripadaju istoj skupini/familiji.	Promatranje i primjećivanje odnosa između proučavanih svojstava. To se uglavnom provodi na neformalnoj osnovi.	Kroz konstrukciju i mjerenje primjećuje se da ako četverokut ima jednake stranice, onda su one međusobno okomite i dijagonale se međusobno raspolavljaju. I obrnuto!
4	Proučava se više formalnih dokaza.	Koristi se aksiomatski sustav za dokazivanje veza/odnosa.	Dokazivati tvrdnju činjenicama ili poučcima kao što su Pitagorin, Euklidov, Talesov ili neki drugi.
5	Geometrija se proučava na apstraktnoj razini. Postoji povezivanje između sustava (primjerice, pomoću algebarskog sustava za rješavanje geometrijskih tvrdnji).	Kao međusobno povezivanje različitih sustava.	Kružnica u 2D proširena je na sferu u 3D ili viših dimenzija prostora. Euklidski aksiomi se uspoređuju s onima u neeuklidskoj geometriji.

6. Van Hieleove razine u eksponencijalnoj i logaritamskoj funkciji

Ovdje ćemo ukazati, uz neke dorade, kako je Judith Ellen Land u svojoj doktorskoj disertaciji ([19]) predložila sljedeće zadatke i pitanja za istraživanje van Hieleovih razina učeničkih postignuća o eksponencijalnim i logaritamskim funkcijama. Na sličan ćemo način konstruirati naše zadatke u istraživanju van Hieleovih razina o ovim, ali i o drugim funkcijama.

	1. razina (predopisno)	**2. razina (opisno)**	**3. razina (teoretski neformalno)**	**4. razina (teoretski formalno)**
vizualno	Koji od grafova a), b), c) ili d) na slici dolje pripada funkciji $f(x) = 2^x$?	Zamislite da graf funkcije $f(x) = 3^x$ rotira oko: A) osi x. Kako izgleda taj komad između $x = 0$ i $x = 1$? B) osi y. Kako izgleda taj komad između $y = 1$ i $y = 2$? C) osi y. Kako izgleda taj komad između $y = 0$ i $y = 1$?	Koji graf na slici dolje lijevo pripada funkciji: 1) $f(x) = 3^x + 1$, ... 2) $f(x) = 3^{x-1}$, ... 3) $f(x) = 3^x$, ... 4) $f(x) = 3^{-x}$, ... 5) $f(x) = -\log_3 x$ ...... 6) $f(x) = \log_3 x + 1$	Procijenite zajednički broj točaka funkcija $f(x) = 5^{-x}$ i $g(x) = -2x + 1$. Možete li dokazati svoj odgovor?
verbalno	Koje su od sljedećih funkcija eksponencijalne: a)$f(x) = 5^x - 1$, b)$f(x) = 2x^5$, c)$f(x) = 4x^3 - 1$, d)$f(x) = 2 \cdot 4^{5x-1}$?	1.) Što je logaritam? 2.) Što je eksponent? 3.) Koja su vrsta brojevi a, x, y u izrazu $y = \log_a x$? 4) Postoje li neki brojevi koji ne mogu biti baza logaritamske funkcije? Obrazložite svoj odgovor! 5) Napišite nekoliko svojstava logaritama koje znadete.	Postoji li veza između funkcija $f(x) = 10^{x+1} + 1$ i $g(x) = \log(x-1) - 1$? Obrazložite odgovor!	Dokažite: $\log(x - \sqrt{x^2-1}) = -\log(x + \sqrt{x^2-1})$.
simbolička manipulacija	Napišite u eksponencijalnom obliku: $\log_2 8 = 3$, $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, $\log_a b = x$. Napišite u logaritamskom obliku $5^{-3} = \frac{1}{125}$.	Popunite prazna mjesta tako da jednakosti budu istinite; $\log 30 = \log 5 + \log \ldots\ldots$, $\log 36 = \log 6 + \log \ldots\ldots$, $\log 36 = \ldots\ldots \log 6$, $\log_{\ldots\ldots} 32 = 5$.	Riješite: 1.) $5^{2x-3} = 16$, 2.)$\log_6 (x-5) + \log_6 x = 2$, 3.) $\log_3(\log_3 x)^6 = 1$,	$\{x \in \mathbf{R} \mid \log_x 0,1 < -1\}$=?
primjena	1.) Danici se nudi ulaganje od 5000 kuna u neki posao s obećanjem da će krajem prve godine taj iznos udvostručiti. Na kraju druge godine novi se iznos udvostručuje i tako dalje pet godina. 2.) Petru je za projekt sponzor ponudio iznos od 2500 kuna s godišnjim povećanjem od 2000 kuna sljedećih pet godina. 3.) U 9:00 sati Ivan je izbrojio 10000 bakterija na hranilištu. U 10:00 izbrojio je 30000 bakterija, a u 11:00 sati 90000. Sve do 21:00 sati broj bakterija se udvostručuje svaki sat vremena. Koji opisani proces ima eksponencijalni rast?	Pod pretpostavkom da se logaritmi na slici dolje desno ponašaju kao i uobičajeni, možete li odrediti logaritme koji nedostaju na slici? B) Naš brojni sustav temelji se na broju deset. Na kojem se broju temelji logaritamska funkcija na slici dolje? C) Koji broj u tom sustavu ima logaritam jednak 2?	Pretpostavimo da se svjetsko stanovništvo udvostručuje svakih 25 godina i da su stope rođenja i smrtnosti konstantne. Ako je 1800. godine bilo 1 milijun ljudi, koliko bi bilo ljudi: a) 1825. godine, b) 1850. godine, c) 1900. godine, d) 2000. godine, e) n-te godine?	Dokažite: a) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, b) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, c) $\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \log_b x$, d) $\log_a b = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}$.
logično		Skicirajte u istom koordinatnom sustavu svaki od ovih grafova: a) $f(x) = 2^x$, b) $f(x) = 2^x - 1$, c) $f(x) = 2^{x-1}$, d) $f(x) = -2^x$, e) $f(x) = 2^{-x}$. Što možete uočiti?	Što je veće: a) 2^1 ili 1^2, b) 3^2 ili 2^3, c) 3^4 ili 4^3, d) 7^6 ili 6^7, e) 2^{300}ili 3^{200}? Obrazložite svoj odgovor!	Možete li predvidjeti cijele brojeve a i b veće od 2 za koje vrijedi $a^b - b^a > 0$? Obrazložite svoju tvrdnju!



Slika 1: Eksponencijalne i logaritamske funkcije

Nakon suglasnosti ministarstva odabrat/konstruirat će se zadatci iz funkcija za svaki razred i oni će biti sastavni dio ovog dokumenta.

7. Troškovi projekta

Projekt će se financirati donacijama i sponzoriranjem te sredstvima koja se dobiju na natječajima za ovakve aktivnosti. Financijski plan uobličit će se nakon što ministarstvo odobri ovo istraživanje i odaberu se škole i nastavnici nakon Javnog poziva. Financijsko izvješće podnijet će se ministarstvu nakon završetka projekta.

8. Literatura

1. Bognar, B. (2009): Ostvarivanje suštinskih promjena u odgojnoj praksi posredstvom akcijskih istraživanja, *Odgojne znanosti, Vol.11 No.2 (18)*

2. Bognar, B. (2006): *Akcijska istraživanja u školi*, Filozofski fakultet, Osijek

3. Benedicto, A.; Acosta, C.; Jaime, A.; Gutiérrez (2016): Analysis of the cognitive demand of a gifted student's strategies to solve geometric patterns problems, *13th International Congress on Mathematical Education*, Hamburg, 24-31

4. Benedicto, C.; Arbona, E.; Gutiérrez, A.; Hoyos, E.; Jaime, A. (2015): Improvement of gifted students' vizualization abilities in a 3D computer enviroment , *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, ICTMT12*, Faro, Portugal, 24-28

5. Burger, W. F., Shaughnessy, J. M. (1986): Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31-48

6. Čižmešija, A.; Svedrec, R.; Radović, N.; Soucie, T. (2010): Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole. U P. Mladinić (Ur.), *Zbornik radova četvrtog kongresa nastavnika matematike RH*, (str. 143-162), Zagreb, Hrvatsko matematičko društvo

7. Dhlamini, S. S. (2012): *An investigation into grade 12 teachers' understanding of Euclidean geometry*, University of KwaZulu-Natal

8. de Villiers, M. (2010): Neka razmišljanja o van Hieleovoj teoriji, U P. Mladinić (Ur.), *Zbornik radova četvrtog kongresa nastavnika matematike RH*, (str. 559-588), Zagreb, Hrvatsko matematičko društvo

9. de Villiers, M. (1987): *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the van Hiele theory: some critical comments*, University of Stellenbosch, South Africa

10. de Villiers, M. (1999): *Rethinking Proof with Sketchpad*, Key Curriculum Press

11. Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R. (1988): *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*, Journal for Research in Mathematics Education Monograph No. 3, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

12. Gravemeijer, K. (2004): Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education, *Mathematical Thinking and learning, 6*(2), 105-128

13. Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Shaughnessy, J. M.; Burger, W. F. (1991): A comparative analysiy of two ways of assessing the van Hiele levels of thinking , *Proceedings of the 15th P. M. E. Conference vol. 2*, (pp. 109-116), Assisi, Italy

14. Idris, N. (1999): *Spatial visualization, field dependence / independence, van Hiele level and achievement in geometry. The influence of selected activities for middle school students*, Ohio State University

15. Isoda, M. (1996): The development of the language of function: An application of van Hiele's levels, Puig, L. & Gutierrez, A. Ed.) *Proceedings of PME 20, Vol. 3*, 105-112

16. Jugmohan, J.; de Villiers, M. (2009): Learners' conceptualisation of the sine function during an introductory activity using Sketchpad at grade 10 level, *Research paper presented by Janeeshla Jugmohan at the Educational Society of South Africa (EASA) Congress*, Univ. of KwaZulu-Natal, 13-16 January 2009.
17. Kelly, A. E., Lesh, R. A. (2000): *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates Publishers
18. Kospentaris, G.; Panayiotis, S. (2008): Assessing the development of geometrical thinking from the visual towards the analytic-descriptive level, *Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 13*, p. 133-157, IREM de Strasbourg
19. Land, J. E. (1990): *Appropriateness of the Van Hiele model for describing students' cognitive processes on algebraic tasks as typified by college students' learning of functions*, Boston University
20. Liu, Y., Zhang, P., Brosnan, P., Erchick, D. (2012): *Examining the Geometry Items of State Standardized Exams Using the van Hiele Model: Test Content and Student Achievement*, The Ohio State University
21. Marrades, R.; Gutiérrez, A. (2000): Proofs prodced by secondary school students learning geometry in a dinamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics 44*, pp. 87-125, Kluwer Academic Publishers, Netherlands
22. Mayberry, J. (1983): The van Hiele levels of geometric thou ght in undergraduate preservice teachers, *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(1), 58-69
23. Nixon, E. G. (2002): *An investigation of the influence of visualization, exploring patterns and generalization on thinking levels in the format of concepts of sequences and series*, Unpublished Masters thesis. Pretoria: UNISA
24. Nixon, E. G. (2005): *Creating and learning abstract algebra: historical phases and conceptual levels*, University of Sout Africa
25. Sfard, A. (2008): *Thinkinkg aas Communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*, Cambridge
26. Steyn, C. (2016): *An Investigation of the Link Between the Typical Geometry Errors and the Van Hiele Levels of Geometric Thought of Grade 9 Learners*, Nelson Mandela Metropolitan University
27. Usiskin, Z. P. (1982): *van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*, University Chicago, IL
28. van Hiele, P. M. (1986): *Structure and insight: A theory of mathematics education*, Orlando, FL: Academic Press
29. van Hiele, P. M. (1959/1985): The child's thought and geometry, In D. Fuys, D. Geddes, R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (p.p. 243-252), Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education
30. van Putten, S. (2008): *Levels of Thought in Geometry of Pre-services Mathematics Educators according to the van Hiele Model*, University of Pretoria, South Africa
31. Vojkuvkova, I. (2012): The van Hiele Model of Geometric Thinking, *WDS'12 Proceedings of Contributed Papers, Part I*, 72-75
32. Wang, S. (2016): *Discourse Perspective of Geometric Thoughts*, Springer

33. Wang, S. (2011): *The van Hiele theory through the discursive lens: Prospective teachers' geometric discourses*, Michigan State University

34. Wirszup, I. (1976): Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, In J. L. Martin (Ed.), *Space and geometry: Papers from a research workshop* (pp. 75-97), Columbus, OH

35. Wu, D. B. (1994): *A study of the use of the van Hiele model in the teaching of non-Euclidean geometry to prospective elementary school teachers in Taiwan, the Republic of China*, Unpublished Doctoral dissertation, University of Northern Colorado, Greeley

36. *** (2000): *Standardi za nastavu matematike*, HMD & V. gimnazija, Zagreb